Varianta 42

Subiectul I.

a) $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{13}$.

b) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

c) Ecuația tangentei este $x - 2y + 6 = 0$.

d) Aria triunghiului *LMP* este $S = \dfrac{3}{2}$.

e) $\cos\left(\vec{v}, \vec{w}\right) = 0$.

f) $a = 0$, $b = 32$.

Subiectul II.

1.

a) Se foloseşte faptul că $\sqrt{2} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

b) Probabilitatea căutată este $p = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$.

c) $g(6) = 1$.

d) $x \in \{-1, 1\}$.

e) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2$

2.

a) $f'(x) = 4^x \cdot \ln 4 + 1$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f'(x)dx) = 4$.

c) $f''(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, deci funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 4\ln 4 + 1$.

e) $\int_0^1 \dfrac{x^3}{x^4 + 10}\, dx = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{11}{10}$.

Subiectul III.

a) $\det(A) = 1$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A^3 = I_3$.

c) Avem $A^3 = I_3$, deci $A^{-1} = A^2$.
d) Considerăm $U, V \in C(A)$.
Avem: $(UV)A = U(VA) = U(AV) = (UA)V = (AU)V = A(UV)$, deci $UV \in C(A)$.
e) Se arată prin calcul direct.
f) Considerăm $Y \in C(A)$, astfel încât $Y^3 = O_3$.

Din **e)** deducem că există $a, b, c \in \mathbf{C}$, astfel încât $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

Deoarece $Y^3 = O_3$, obținem $\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 + 6abc = 0 \\ 3(a^2c + b^2a + c^2b) = 0 \\ 3(a^2b + b^2c + c^2a) = 0 \end{cases}$, de unde rezultă ușor

$a = b = c = 0$.
g) Avem $3^7 = 2187$ și din $Z^{2007} = O_3$ rezultă și $Z^{2187} = O_3$.

$$Z^{2187} = O_3 \Leftrightarrow \left(Z^{3^6}\right)^3 = O_3 \overset{\text{f)}}{\Leftrightarrow} Z^{3^6} = O_3 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow Z^3 = O_3 \overset{\text{f)}}{\Leftrightarrow} Z = O_3.$$

Subiectul IV.
a) Deoarece 2π este perioadă pentru funcția cosinus, este evidentă concluzia.
b) Considerăm șirurile $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ și $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $x_n = 2n\pi$, $y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \frac{1}{4}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \frac{1}{3}$, de unde rezultă că nu există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

c) Evident, deoarece $-1 \le \cos x \le 1$.
d) Iese imediat, folosind punctul **c)**.
e) Prin calcul direct.

f) Din $f(t) \ge \frac{1}{4}$, $\forall\, t \in \mathbf{R}$ rezultă $\int_0^x f(t)\,dt \ge \frac{x}{4}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, deci $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = +\infty$.

g) Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = +\infty$, graficul funcției F nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$.

Din **a)** se obține $F(x+2\pi) = F(x) + F(2\pi)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ și se arată că pentru $a = \frac{F(2\pi)}{2\pi}$ funcția $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $G(x) = F(x) - ax$ este periodică, de perioadă 2π și fiind continuă, este mărginită. Obținem $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{G(x)}{x} + a\right) = a$.

Cum $\lim\limits_{x\to\infty}(F(x) - ax) = \lim\limits_{x\to\infty} G(x)$, iar ultima limită nu există (o funcție periodică și neconstantă nu are limită spre $+\infty$), rezultă că graficul lui F nu are asimptotă spre $+\infty$